4.5 Najděte Taylorův polynom druhého řádu pro funkci f v okolí bodu a_0 a určete pomocí něj přibližnou hodnotu $f(a)$ pro daný bod a:

$\vec{h} = (h_1, h_2)$

$h_1 = x - x_0 \quad h_2 = y - y_0$

(i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x}-y}$, $a_0 = \overset{(x_0,y_0)}{(1,1)}$, $a = (\overset{x}{1.01},\ \overset{y}{0.98})$

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + df(a_0)[\vec{h}] + \frac{1}{2!} d^2 f(a_0)[\vec{h}, \vec{h}]$$

kde $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ a bilineární forma $d^2 f(a_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je určena tzv. Hessovou maticí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a_0) \end{pmatrix}$$

$$d^2 f(a_0)[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{v} \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

$$\nabla f_{|a_0} = \left(e^{\sqrt{x}-y}\frac{1}{2\sqrt{x}},\ -e^{\sqrt{x}-y}\right)_{|a_0} = \left(\tfrac{1}{2}, -1\right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{x}-y}\frac{1}{4x} - e^{\sqrt{x}-y}\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4} & -e^{\sqrt{x}-y}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ -e^{\sqrt{x}-y}\frac{1}{2\sqrt{x}} & e^{\sqrt{x}-y} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \quad f(x,y)$$

$$d^2 f(a_0)[\vec{h}, \vec{h}] = \vec{h}^T \cdot H_{|a_0} \cdot \vec{h}$$

$$df(a_0)[\vec{h}] = \nabla f_{|a_0} \cdot \vec{h}$$

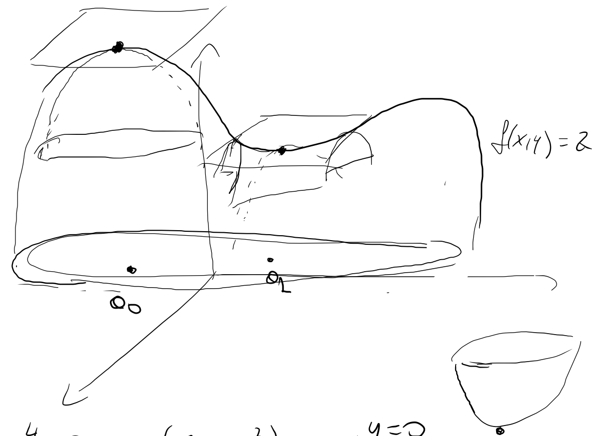
$$T_2(a_0 + \vec{h}) = 1 + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}, -1\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}_{\text{differen.}} + \frac{1}{2}(h_1, h_2)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \underline{1 + \tfrac{1}{2}h_1 - h_2 - \tfrac{1}{8}h_1 h_2 + \tfrac{1}{2}h_2^2}$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2)$.

Takže pro $\vec{h} = (0.01,\ -0.02)$ máme

$$f(a) \doteq T(a) = T(a_0 + \vec{h}) = 1 + \tfrac{1}{2}0.01 + 0.02 + \tfrac{1}{8}0.01 \cdot 0.02 + \tfrac{1}{2}0.02^2 = \underline{\underline{1.025225}}\ .$$

Lokální extrémy, stručný postup



1. Zjistíme stacionární body, tj. body, kde $\nabla f(x,y) = 0$

2. Abychom zjistili, zda se v nich nabývá nějaký extrém funkce f, sestavíme tzv. Hessovu matici (nebo krátce hessián):

- Jsou-li všechny hlavní subdeterminaty v daném bodě > 0, má f v tomto bodě minimum. $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$
- Střídají-li hlavní subdeterminaty v daném bodě znaménko s tím, že první subdeterminant $D_1 < 0$, má f v tomto bodě maximum. $(\lambda_1, \lambda_2 < 0)$
- Je-li $\det \mathbb{H} \neq 0$ v daném bodě a neplatí-li ani jedno z výše uvedených pravidel, je v příslušný bod sedlový.

Najděte lokální extrémy $\quad f(x,y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$.

$\nabla f = \vec{0} \qquad \nabla f = \langle 6y - 3x^2, 6x - 6y^2 \rangle$

$$\begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{cases} \qquad x = y^2 \qquad 2y - y^4 = 0 \qquad y(2 - y^3) = 0 \;\begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \quad x = 0 \qquad P_1(0,0)$$

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{2} \\ x = y^2 \end{cases} \qquad P_2(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$$

stac. body

$$H = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$

$$H|_{P_1} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_1 = 0 \qquad D_2 = \det H_{P_1} = -36 < 0$$

V P_1 f má sedlový bod

$$H|_{P_2} = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix} \qquad D_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0 \qquad D_2 = 12 \cdot 6 \cdot 2 - 36 > 0$$

V P_2 f má lok. max.

Vyšetřete lokální extrémy : $f = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2+y^2)$, $\longleftarrow$

$\nabla f = \vec{0}$

$$\nabla f = \langle e^{-(x^2+y^2)}(-2x)(2x^2+y^2) + e^{-(x^2+y^2)}(4x),\ e^{-(x^2+y^2)}(-2y)(2x^2+y^2) + e^{-(x^2+y^2)}(2y) \rangle$$

$$= \langle e^{-(x^2+y^2)}\underbrace{(-2x)(2x^2+y^2-2)}_{(-4x^3-2xy^2+4x)},\ e^{-(x^2+y^2)}\underbrace{(-2y)(2x^2+y^2-1)}_{(-4yx^2-2y^3+2y)} \rangle$$

$$\begin{cases} (-2x)(2x^2+y^2-2)=0 \\ (-2y)(2x^2+y^2-1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2+y^2-2=0 \\ y(2x^2+y^2-1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ (2y)(2x^2+y^2-1)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2+y^2-2=0 \\ 2x^2+y^2-1=0 \end{cases} \ \emptyset$$

$P_1(0,0)$

$P_2(0,1)$

$P_3(0,-1)$

$P_4(1,0)$

$P_5(-1,0)$

$$H = \begin{pmatrix} e^{-(x^2+y^2)}\left[(-2x)(-4x^3-2xy^2+4x)-12x^2-2y^2+4\right] & e^{-(x^2+y^2)}\left[(-2y)(-4x^3-2xy^2+4x)-4xy\right] \\ '' & e^{-(x^2+y^2)}\left[-2y(-4yx^2-2y^3+2y)-4x^2-6y+2\right] \end{pmatrix} \longleftarrow ?$$

$$H|_{P_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$D_1 = 4 > 0$

$D_2 = 8 > 0$

v P_1 f má lok. min

$$H|_{P_2} = \begin{pmatrix} e^{-1}2 & 0 \\ 0 & e^{-1}(-4) \end{pmatrix}$$

$D_1 = \frac{2}{e} > 0$

$D_2 = \frac{-8}{e^2} < 0$

v P_2 f má sedl. bod. . . . . . .

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $\underline{x,y,z>0}$,

(b) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xy - 2y + 2z$.

a) $\nabla f = \vec{o}$ $\qquad \nabla f = \left\langle 1 - \frac{y^2}{4x^2}, \frac{2y}{2\cancel{4}x} - \frac{z^2}{y^2}, \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} \right\rangle$

$$\begin{cases} 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \\ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2 = y^2 \\ y^3 = 2xz^2 \\ z^3 = y \end{cases} \qquad \begin{matrix} z^9 = 2xz^2 \quad (z \neq 0) \\ y = z^3 \end{matrix} \qquad \begin{cases} z^{14} = z^6 \\ z^7 = 2x \\ y = z^3 \end{cases}$$

$z^8 = 1 \qquad \underline{z = \pm 1} \qquad \underline{\underline{z > 0}}$

$$\begin{cases} z = 1 \\ x = 1/2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad P_1\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

$$H = \begin{pmatrix} +\frac{y^2(+\cancel{2})}{2\cancel{4}x^3} & -\frac{\cancel{2}y}{2\cancel{4}x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix} \qquad H|_{P_1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$D_1 = 4 > 0$

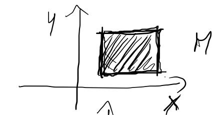
$D_2 = 12 - 4 > 0$

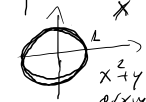
$D_3 = 12 \cdot 6 - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 6$
$= 12 \cdot 6 - 4(10) > 0$

v P_1 f má lok. min.

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

ABS. MAX ABS. MIN





$x^2+y^2=1$

$g(x,y)=x^2+y^2-1$

Vázané extrémy, stručný postup

Vyšetříme extrémy funkce f na M. Množina M je zadaná vazebnou podmínkou $g(x,y)=0$. Sestavíme tzv. Lagrangeovu funkci $L=f+\lambda g$. $L(x,y,\lambda)$ $\lambda\in\mathbb{R}$

Vypočteme stacionární body funkce L, tj. řešíme následující rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0.$$

$P_1(x_1,y_1)$

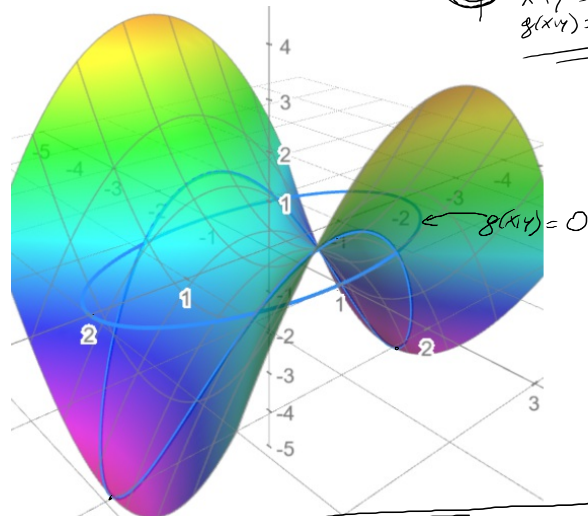
$P_2(x_2,y_2)$

P_M

$f(P_1)$ $f(P_2)$ $f(P_3)$ . . . . .

Vyšetřete extrémy funkce f na zadané množině M.

(a) $f=y^2-x^2$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2=4\}$, $=\{(x,y):\underbrace{x^2+4y^2-4}_{g(x,y)}=0\}$



$L(x,y,\lambda)=y^2-x^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$ $\nabla L=\vec{0}$

$$\begin{cases} -2x+2x\lambda=0 \\ 2y+8y\lambda=0 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$$

$2x(-1+\lambda)=0$

$2y(1+4\lambda)=0$

$\begin{cases} x=0 \\ y=\pm1 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda=1 \\ y=0 \\ x^2=4 \end{cases}$

$P_1(0,1)$

$P_2(0,-1)$

$P_3(2,0)$

$P_4(-2,0)$

$f(P_1)=f(P_2)=1$ ← ABS. MAX pro f na M.

$f(P_3)=f(P_4)=-4$ ← ABS. MIN pro f na M

$x^2=4-4y^2$ $x=\pm\sqrt{4-4y^2}$ $y\in\langle-1,1\rangle$

$f(x,y)=f(\pm\sqrt{4-4y^2},y)=y^2-4+4y^2=5y^2-4=f(y)$

$f'(y)=10y$ $y=0$ $f(0)=-4$

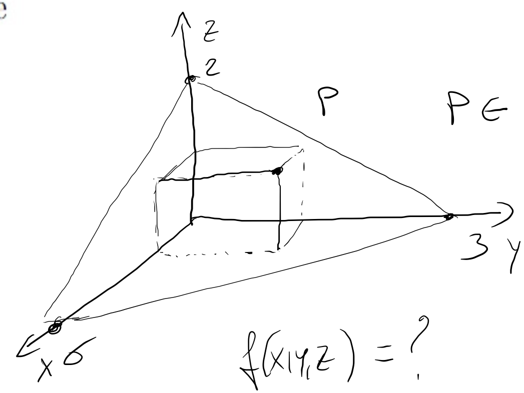
$f(-1)=f(1)=1$

$y=0$: $P_3(2,0)$ $P_4(-2,0)$ $P_1(0,1)$ $y=1$ $P_2(0,-1)$ $y=-1$

Nalezněte body (globálního) minima a maxima funkce f na množině M

$$f(x,y) = xy^2,\ M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Nalezněte rozměry kvádru o největším objemu, který leží v prvním oktantu, má tři stěny v rovinách $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a jeden vrchol má v rovinč $x + 2y + 3z = 6$.



x, y, z

$P \in \underline{\underline{x + 2y + 3z = 6}}$

$P[x, y, z]$

$f(x, y, z) = ?$

Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

Vyšetřete extrémy funkce f na zadané množině M.

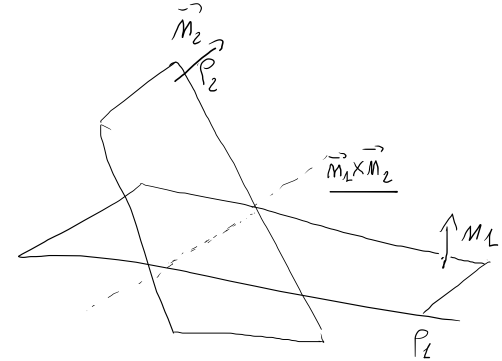
$f = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$,

v bodech $(1, 1)$ a $(-1, -1)$ je minimum, maximum neexistuje, neboť funkce f je shora neomezená na M.

DÚ 3.

Nalezněte tečnou rovinu k ploše $S:\ x^2+2y^2+3z^2=6$, která je kolmá na roviny $2x-y+z=0$ a $2x-y-5z=0$.

$\rho_1 \qquad\qquad \rho_2$



$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-6 \qquad \nabla \bar{f} = \langle 2x, 4y, 6z \rangle$$

$$\nabla \bar{f} \perp \vec{n}_1 \ \text{a} \ \nabla \bar{f} \perp \vec{n}_2 \ ^{(*)} \iff \nabla \bar{f} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} i & 2 & 2 \\ j & -1 & -1 \\ k & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla f \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda & x &= \lambda/2 \\ 4y &= 2\lambda & y &= \lambda/2 \\ 6z &= 0 & z &= 0 \\ x^2+2y^2&+3z^2=6 \end{aligned}$$

(*) nebo

$$\begin{cases} 4x-4y+6z=0 \\ 4x-4y-30z=0 \\ x^2+2y^2+3z^2=6 \end{cases} \Rightarrow z=0, \quad x=y, \quad 3x^2=6, \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=\pm\sqrt{2} \\ z=0 \end{cases}$$

$$\frac{\lambda^2}{4} + 2\frac{\lambda^2}{4} + 0 = 6 \qquad 3\lambda^2 = 24 \qquad \lambda^2 = 8 \qquad \lambda = \pm 2\sqrt{2}$$

$$P_1[\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0] \qquad P_2[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0]$$

$$\tau_1:\ x+2y = 3\sqrt{2}$$

$$\tau_2:\ x+2y = -3\sqrt{2}$$